

ΜΑΘΗΜΑ 20

1.7 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Όριο πολυωνυμικής και ρητής συνάρτησης

Όριο εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης

Θεωρία - Ασκήσεις

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ σημαίνει ότι

οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησης f πλησιάζουν όλο και περισσότερο τον πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς η μεταβλητή x γίνεται μεγαλύτερη από κάθε θετικό αριθμό δ .

2.

Ορισμός

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ σημαίνει ότι

οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησης f γίνονται μεγαλύτερες από κάθε θετικό αριθμό M , καθώς η μεταβλητή x γίνεται μεγαλύτερη από κάθε θετικό αριθμό δ .

3.

Ορισμός

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ σημαίνει ότι

οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησης f γίνονται μικρότερες από κάθε αρνητικό αριθμό $-M$, καθώς η μεταβλητή x γίνεται μεγαλύτερη από κάθε θετικό αριθμό δ .

4.

Ορισμός

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ σημαίνει ότι

οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησης f πλησιάζουν όλο και περισσότερο τον πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς η μεταβλητή x γίνεται μικρότερη από κάθε αρνητικό αριθμό $-\delta$.

5.

Ορισμός

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ σημαίνει ότι

οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησης f γίνονται μεγαλύτερες από κάθε θετικό αριθμό M , καθώς η μεταβλητή x γίνεται μικρότερη από κάθε αρνητικό αριθμό $-\delta$.

6.

Ορισμός

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ σημαίνει ότι

οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησης f γίνονται μικρότερες από κάθε αρνητικό αριθμό $-M$, καθώς η μεταβλητή x γίνεται μικρότερη από κάθε αρνητικό αριθμό $-\delta$.

7.

Βασικά όρια.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \quad \dots, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \quad \dots, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2v+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty, \quad \dots, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2v} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \dots, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^v} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \dots, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^v} = 0$$

8.

Το όριο στο άπειρο πολυωνυμικής

Το $\lim_{x \rightarrow \pm \infty}$ πολυωνυμικής συνάρτησης είναι ίσο με το $\lim_{x \rightarrow \pm \infty}$ του μεγιστοβάθμιου όρου της.

9.

Το όριο στο άπειρο ρητής

Το $\lim_{x \rightarrow \pm \infty}$ ρητής συνάρτησης είναι ίσο με το $\lim_{x \rightarrow \pm \infty}$ του πηλίκου των μεγιστοβάθμιων όρων αριθμητή – παρανομαστή.

10.**Το όριο στο άπειρο εκθετικής και λογαριθμικής**

Προκύπτει από τη γραφική παράσταση.

11.**Από το όριο στο πρόσημο**Αν $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο $\pm \infty$ Αν $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο $\pm \infty$ **12.****Χρήσιμες ιδιότητες**Αν $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ Αν $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$ με $f(x) > 0$ κοντά στο $\pm \infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ Αν $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$ με $f(x) < 0$ κοντά στο $\pm \infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ Αν $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} |f(x)| = +\infty$, **όχι αντίστροφα.**Αν $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Χρήσιμο τριγωνομετρικό όριο

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$$

Απόδειξη

$$0 < \left| \frac{\eta \mu x}{x} \right| = \frac{|\eta \mu x|}{|x|} < \frac{1}{|x|}$$

αλλά $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{|x|} = 0$, οπότε με το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$

Προσοχή: Θυμίζουμε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$

2.

Χρήσιμο τριγωνομετρικό όριο

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 1$$

Απόδειξη

Θέτουμε $x = \frac{1}{u}$, οπότε $u \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{1}{u} \eta \mu u \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta \mu u}{u} = 1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x})$

Προτεινόμενη λύση

Χωρίς απροσδιοριστία

Πεδίο ορισμού: $(0, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty, \quad \text{άρα και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty$$

$$\text{άρα και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}) = +\infty$$

2.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x})$

Προτεινόμενη λύση

Συζυγής παράσταση

Πεδίο ορισμού: $(0, +\infty)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{x + \sqrt{x} - x}{\sqrt{x} \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{x}}{x}} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2}$$

3.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} + 2x)$

Προτεινόμενη λύση

Συζυγής παράσταση

Εργαζόμαστε με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-\infty, 0)$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} + 2x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 1} + 2x)(\sqrt{4x^2 + 1} - 2x)}{\sqrt{4x^2 + 1} - 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 1 - 4x^2}{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x^2}\right)} - 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + 2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + 2} = 0 \cdot \frac{1}{4} = 0
 \end{aligned}$$

4.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x-1} - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$

Προτεινόμενη λύση

Διπλή συζυγής παράσταση

Πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x-1} - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x-1} - 2\sqrt{x})(\sqrt{4x-1} + 2\sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{4x-1} + 2\sqrt{x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4x-1-4x)(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{(x+1-x)(\sqrt{4x-1} + 2\sqrt{x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{4x-1} + 2\sqrt{x}} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x(1 + \frac{1}{x})} + \sqrt{x}}{\sqrt{x(4 - \frac{1}{x})} + 2\sqrt{x}} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{4 - \frac{1}{x}} + 2\sqrt{x}} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}{\sqrt{4 - \frac{1}{x}} + 2} \\
 &= - \frac{\sqrt{1+0} + 1}{\sqrt{4-0} + 2} = - \frac{2}{4} = - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

5.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-1}{3x-1} - \frac{x^2+x}{3x+1} \right)$

Πάμε για ρητή

Προτεινόμενη λύση

Θεωρούμε $f(x) = \frac{(x^2-1)(3x+1) - (x^2+x)(3x-1)}{(3x-1)(3x+1)}$ κοντά στο $-\infty$

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 3x - 1 - 3x^3 + x^2 - 3x^2 + x}{9x^2 - 1}$$

$$f(x) = \frac{-x^2 - 2x - 1}{9x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{9x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{9} = -\frac{1}{9}$$

6.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)(3x^2+2)^8}{(2x^3+x^2)^5(x^2-4)^3}$

Πάμε για ρητή

Προτεινόμενη λύση

Αν φανταστούμε τις πράξεις, ο αριθμητής είναι πολυώνυμο με μεγιστοβάθμιο

$$\text{όρο } x \cdot (3x^2)^8 = x \cdot 3^8 x^{16} = 3^8 x^{17}$$

και ο παρανομαστής είναι πολυώνυμο με μεγιστοβάθμιο

$$\text{όρο } (2x^3)^5 \cdot (x^2)^3 = 2^5 \cdot x^{15} \cdot x^6 = 2^5 x^{21}$$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)(3x^2+2)^8}{(2x^3+x^2)^5(x^2-4)^3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^8 x^{17}}{2^5 x^{21}} \\ &= \frac{3^8}{2^5} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4} = \frac{3^8}{2^5} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

7.

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+1)f^2(x) - 2f(x) + 3x}{xf^2(x) + (x+1)f(x) - 3}$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+1)f^2(x) - 2f(x) + 3x}{xf^2(x) + (x+1)f(x) - 3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2xf^2(x) + f^2(x) - 2f(x) + 3x}{xf^2(x) + xf(x) + f(x) - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf^2(x) \left[2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{xf(x)} + \frac{3}{f^2(x)} \right]}{xf^2(x) \left[1 + \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{xf(x)} - \frac{3}{xf^2(x)} \right]} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{xf(x)} + \frac{3}{f^2(x)} \right]}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{xf(x)} - \frac{3}{xf^2(x)} \right]} = \\ &= \frac{2+0-0+0}{1+0+0-0} = 2 \end{aligned}$$

Όπως στις ρητές

8.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln x^2 + e}$

Προτεινόμενη λύση

Θεωρούμε $f(x) = \frac{\ln x}{\ln x^2 + e}$ κοντά στο $+\infty$, άρα $f(x) = \frac{\ln x}{2\ln x + e}$

Θέτουμε $u = \ln x$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln x^2 + e} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2\ln x + e} \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{2u + e} \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{u \left(2 + \frac{e}{u} \right)} \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + \frac{e}{u}} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Αλλαγή μεταβλητής

9.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+5} + \sqrt{x+1} - 2x)$

Προτεινόμενη λύση

Διάσπαση

Εργαζόμαστε με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{x+5} + \sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} = (\sqrt{x+5} - \sqrt{x}) + (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \\
 &= \frac{(\sqrt{x+5} - \sqrt{x})(\sqrt{x+5} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\
 &= \frac{x+5-x}{\sqrt{x}\left(1+\frac{5}{x}\right) + \sqrt{x}} + \frac{x+1-x}{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x}\right) + \sqrt{x}} \\
 &= \frac{5}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{5}{x}} + \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{x}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{x}} + 1} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1} \right)
 \end{aligned}$$

Αλλά $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{x}} + 1} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1} \right) = \frac{5}{\sqrt{1+0} + 1} + \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \cdot 3 = 0$

10.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2+1} + \sqrt{x^2-1} - 3x)$

Προτεινόμενη λύση

Διάσπαση

Εργαζόμαστε με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$

$$f(x) = \sqrt{4x^2+1} + \sqrt{x^2-1} - 3x = (\sqrt{4x^2+1} - 2x) + (\sqrt{x^2-1} - x)$$

Συνεχίζουμε όπως στην άσκηση 9.